

Converses des formules de Barcan

28 mars 2022

Démontrons d'abord $\Diamond \exists x Px \rightarrow \exists x \Diamond Px$:

1		$\Diamond \exists x Px$	H
2		$\neg \Box \forall x \neg Px$	Déf
3		$\forall x \Box \neg Px$	H
4		$\Box \neg Pt$	Instanciation universelle
5		$\Box$	
6		$\neg Pt$	Elimination de $\Box$
7		$\forall x \neg Px$	Généralisation universelle, t est quelconque
8		$\Box \forall x \neg Px$	Intro de $\Box$
9		$\perp$	$\perp$ -introduction
10		$\neg \forall x \Box \neg Px$	$\neg$ -introduction
11		$\exists x \Diamond Px$	Définition de $\Diamond$
12		$\Diamond \exists x Px \rightarrow \exists x \Diamond Px$	$\rightarrow$ -introduction

Montrons maintenant que $\Box \forall x Px \rightarrow \forall x \Box Px$:

1		$\Box \forall x Px$	H
2		$\Box$	
3		$\forall x Px$	$\Box$ -élimination
4		Pt	Instanciation universelle
5		$\Box Pt$	$\Box$ -introduction
6		$\forall x \Box Px$	Généralisation universelle, t est quelconque
7		$\Box \forall x Px \rightarrow \forall x \Box Px$	$\rightarrow$ -introduction

Méthode des arbres :

$$\begin{array}{l}
(1) \qquad \qquad \qquad V : \Diamond \exists x Px, 1 \\
\qquad \qquad \qquad F : \exists x \Diamond Px, 1 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad 1R2 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad V : \exists x Px, 2 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad V : Pt, 2 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad F : \Diamond Pt, 1 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad F : Pt, 2 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad \times \\
\\
(2) \qquad \qquad \qquad V : \Box \forall x Px \\
\qquad \qquad \qquad F : \forall x \Box Px, 1 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad F : \Box Pt, 1 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad 1R2 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad F : Pt, 2 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad V : \forall x Px, 2 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad V : Pt, 2 \\
\qquad \qquad \qquad \quad | \\
\qquad \qquad \qquad \times
\end{array}$$